

Nombres Complexos

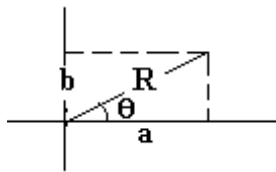
A l'hora de resoldre circuits en corrent altern la tècnica dels nombres complexos és de molta utilitat .

La unitat imaginària és $\sqrt{-1} = j$; $j^2 = -1$; $j^3 = -j$; $j^4 = 1$

Forma binària : $z = a + b j$; a : part real ; b : part imaginària ;

Operació elemental : Suma : $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) j$

Resta : $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) j$



$$\text{On } R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{i} \quad \tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$a = R \cos \theta \quad b = R \sin \theta$$

Forma Polar

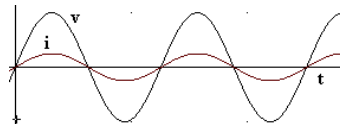
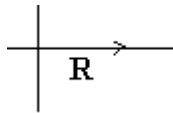
$Z = R_{\theta}$ Operacions bàsiques : - producte $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \cdot R_2)_{\theta_1 + \theta_2}$

- divisió $z_1 / z_2 = (R_1 / R_2)_{\theta_1 - \theta_2}$

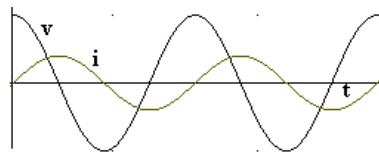
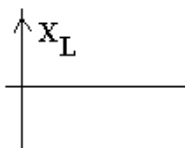
Impedància . $Z = a + b j$; $I = \frac{V}{Z}$

$$Z = R$$

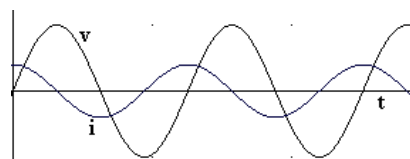
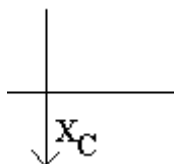
$$I = \frac{V}{R}$$



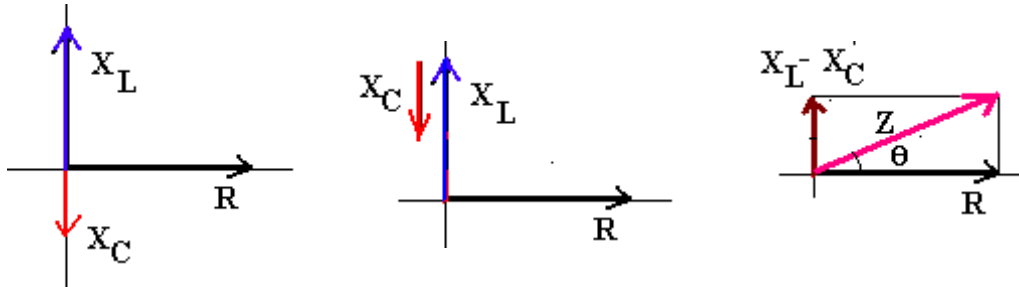
$$Z = X_L j = L \cdot \omega j \equiv L \omega_{90^\circ} \quad I = \frac{V_{0^\circ}}{L \omega_{90^\circ}} = \left(\frac{V}{L \omega} \right)_{-90^\circ}$$



$$Z = -\frac{1}{C \omega} j \equiv \left(\frac{1}{C \omega} \right)_{-90^\circ} \quad I = \frac{V}{\left(\frac{1}{C \omega} \right)_{-90^\circ}} = (V C \omega)_{+90^\circ}$$



RLC Sèrie



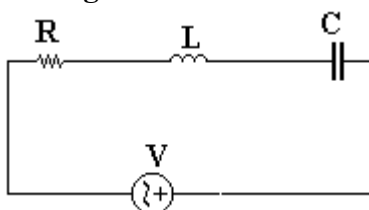
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \tan \theta = \frac{X_L - X_C}{R} \quad R = Z \cos \theta \quad ; \quad I = \frac{V}{Z_{\theta}} = I_R = I_L = I_C$$

Resonància : $X_L = X_C \rightarrow Z = R$: Mínima Impedància , màxima intensitat en c.a

$$L2\pi f = \frac{1}{C2\pi f} \rightarrow f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$I_R = \frac{V_R}{R} \text{ en fase amb la tensió aplicada} \quad ; \quad I_L = \frac{V_L}{L\omega} 90^\circ \quad ; \quad I_C = \frac{V_C}{\left(\frac{1}{C\omega}\right)_{-90^\circ}}$$

Voltatges

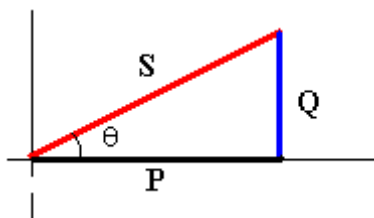


$$\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$$

$$V_R = I_0 \cdot R_{0^\circ} \quad ; \quad V_L = I_0 \cdot X_L + 90^\circ \quad ; \quad V_C = I_0 \cdot X_C - 90^\circ \quad ;$$

Potències

$$P = I^2 \cdot R = V \cdot I \cdot \cos \theta \quad ; \quad \text{Activa} \quad ; \quad (\text{Watts})$$

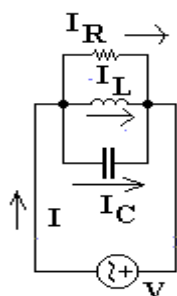


$$Q = Q_L - Q_C = I^2 \cdot X_L - I^2 \cdot X_C = I^2 \cdot (X_L - X_C) = I^2 \cdot X =$$

$$V \cdot I \cdot \sin \theta \quad ; \quad \text{Reactiva} \quad ; \quad (\text{VAr})$$

$$S = I^2 \cdot Z = V \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad ; \quad \text{Aparent} \quad ; \quad (\text{VA})$$

RLC Paral·lel



$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C \quad ; \quad I_R = \frac{V}{R} \text{ en fase amb } V \quad \tan \theta = \frac{I_C - I_L}{I_R}$$

$$; \quad I_L = \frac{V}{L\omega} 90^\circ \quad ; \quad I_C = \frac{V}{\left(\frac{1}{C\omega}\right)_{-90^\circ}} \quad ; \quad I = \frac{V}{Z_{\theta}} \quad I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

Teorema de Boucherot

$$P = \sum P_i \quad Q = \sum Q_i$$

Observacions

1. Quan el comportament de les diferents impedàncies té un comportament clarament definit : resistiu , inductiu o capacitiu aplicarem segons si la associació és en sèrie o paral.lel :

$$\text{Sèrie } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\text{Paral.lel : } I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \text{ com que } I_C = \frac{V_{0^\circ}}{X_{C-90^\circ}} = \left(\frac{V}{X_C} \right)_{+90^\circ} \quad I_L = \frac{V_{0^\circ}}{X_{L+90^\circ}} = \left(\frac{V}{X_L} \right)_{-90^\circ}$$

2. Quan alguna de les càrregues no tingui un comportament clarament definit :

$$\text{Sèrie : } \bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 \quad ; \quad Z = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2} \quad ; \quad \tan \theta = \frac{Z_y}{Z_x} \quad \bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3$$

$$\text{Paral.lel : } \bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \quad ; \quad I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} \quad ; \quad \tan \theta = \frac{I_y}{I_x}$$

3. La resonància en sèrie representa una $Z_{\text{mínima}}$ i $I_{\text{Màxima}}$

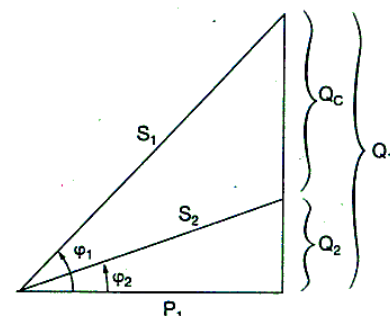
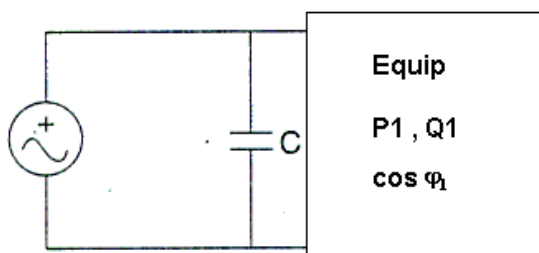
La resonància en paral.lel representa una $I_{\text{mínima}}$ i $Z_{\text{Màxima}}$

4. Quan tenim un circuit sèrie + Paral.lel

$$\text{Paral.lel : } \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \quad ; \quad \text{Sèrie : } Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

Correcció del factor de potència

Volem reduir la potència reactiva i mantenir la potència activa



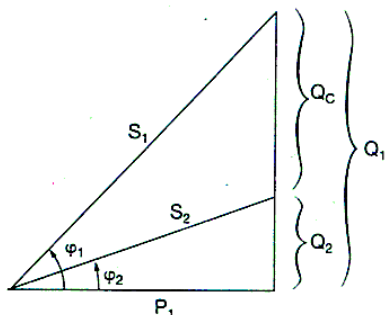
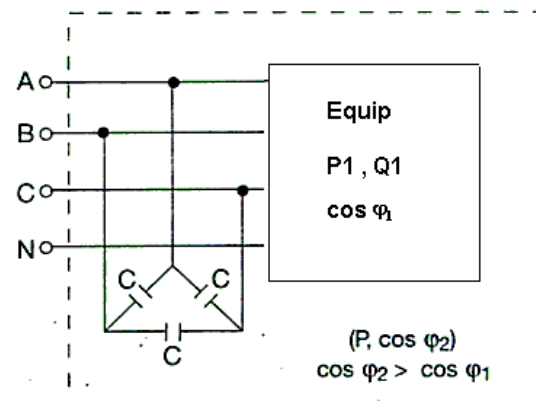
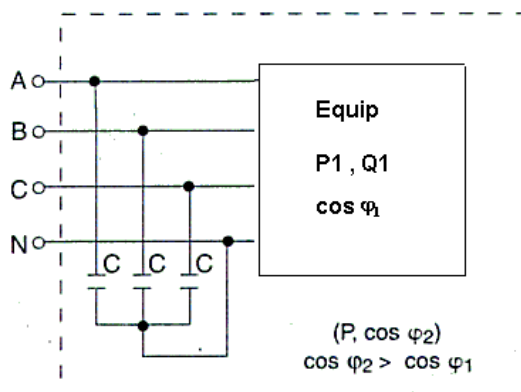
$$\begin{cases} P_1 = V_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ Q_1 = V_1 \cdot I_1 \cdot \sin \varphi_1 \end{cases} \rightarrow \frac{Q_1}{P_1} = \tan \varphi_1 \rightarrow Q_1 = P_1 \cdot \tan \varphi_1 ; Q_2 = P_1 \cdot \tan \varphi_2$$

$$S_2 < S_1 \rightarrow V \cdot I_1 < V \cdot I_2 \rightarrow I_1 < I_2 ; P_1 = P_2 ;$$

$$V \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 = V \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}$$

$$\text{Llavors : } Q_C = Q_1 - Q_2 ; Q_C = \frac{V^2}{X_C} = \frac{V^2}{\frac{1}{C2\pi f}} = V^2 C 2\pi f$$

Quan tenim un sistema trifàsic la càrrega a con.nectar per millorar el factor de potència serà tres condensadors en estrella o triangle :



Calcularem com si fos en global tots tres condensadors amb el mateix procediment que el monofàsic . Després

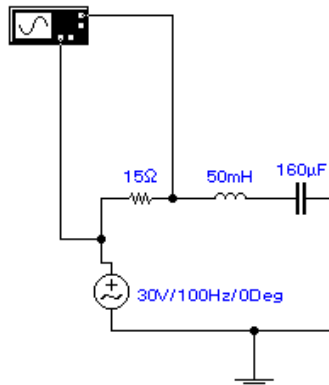
$$Q_C = \frac{Q_T}{3}$$

$$\text{En estrella } C \text{ aguanta } V_{F\max} = \sqrt{2} \frac{V_L}{\sqrt{3}} ; X_C = \frac{V_F^2}{Q_C}$$

$$\text{En triangle } C \text{ aguant } V_{L\max} = \sqrt{2} \frac{V_L}{\sqrt{3}} : X_C = \frac{V_L^2}{Q_C}$$

Quant més volem millorar l'fdp més gran haurà de ser el condensador i per tant pot arribar a ser molt car l'equip de millora .

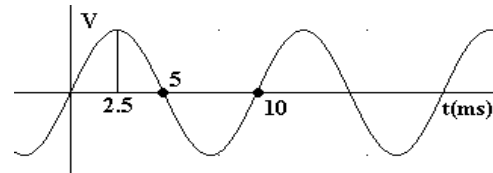
Pràctica RLC Sèrie



Si aprofitem i fem els càlculs :

$$X_L = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 100 = 31,42 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{160 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 100} = 9,95 \, \Omega \quad T = \frac{1}{100} = 0,01s = 10ms$$



$Z =$

$$\sqrt{15^2 + (31,42 - 9,95)^2} = 26,19 \, \Omega$$

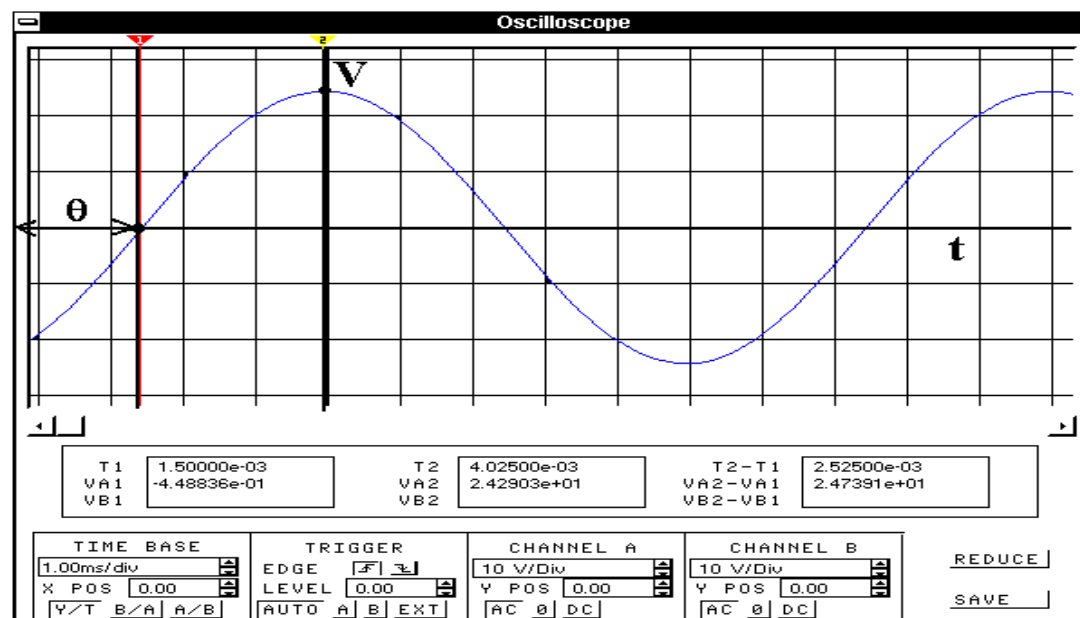
$$\tan \theta = \frac{31,42 - 9,95}{15} = 1,431 \rightarrow \theta = 55^\circ \quad ; \quad I = \frac{30 \angle 0^\circ}{26,19 \angle 55^\circ} = 1,14 \angle -55^\circ$$

$$V_R = I R = 1,14 \angle -55^\circ \cdot 15 \angle 0^\circ = 17,1 \angle -55^\circ \, V \quad ; \quad V_L = I X_L = 1,14 \angle -55^\circ \cdot 31,42 \angle 90^\circ = 35,82 \angle 35^\circ \, V$$

$$V_C = I X_C = 1,14 \angle -55^\circ \cdot 9,95 \angle -90^\circ = 11,34 \angle -145^\circ \, V$$

De la mateixa manera podem obtenir tots aquestos resultats a partir de fer un estudi amb l'oscil·loscopi del voltatge registrat en cada component .

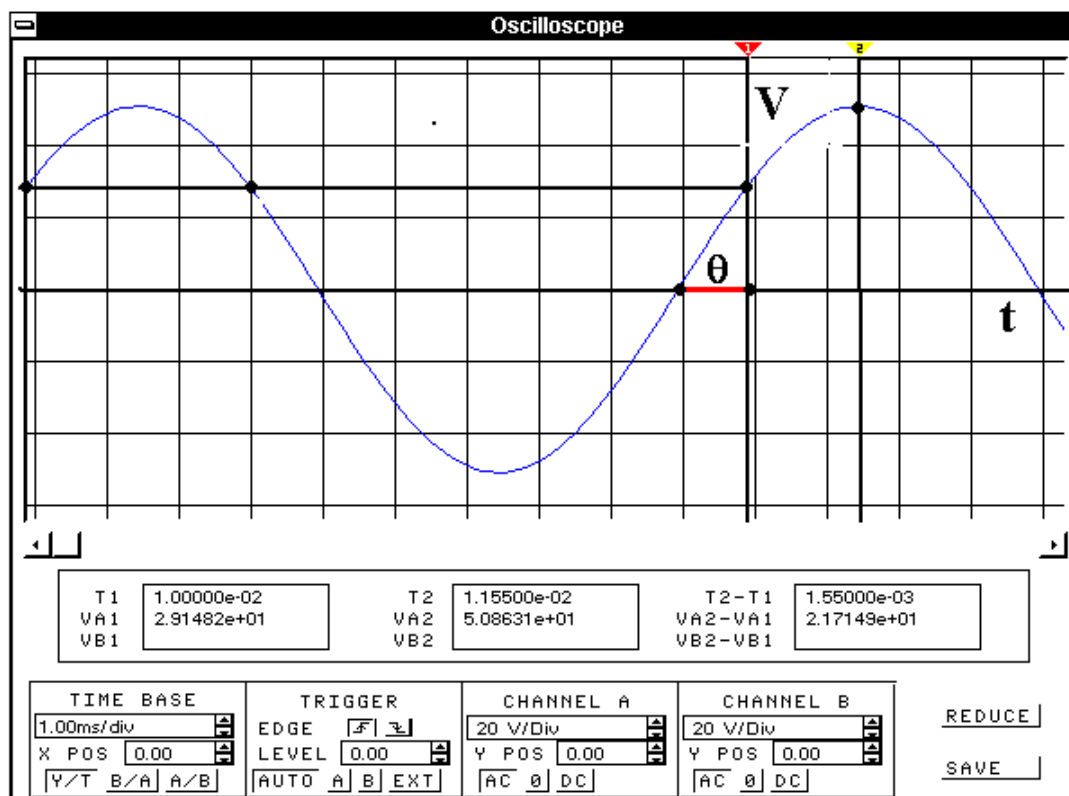
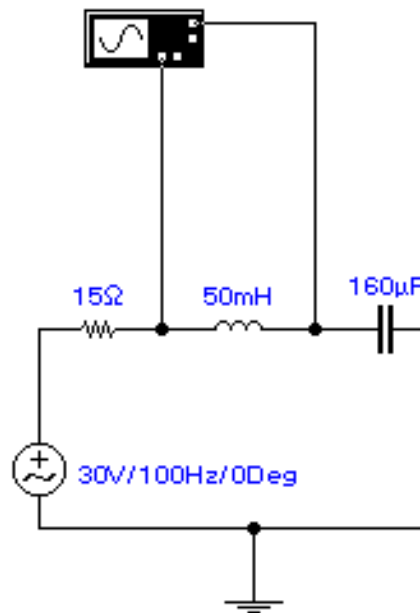
A la Resistencia R :



$$\theta = 1,5 \, ms \quad ; \quad \frac{5}{180} = \frac{1,5}{x} \rightarrow x \approx 55^\circ \text{ com que l'ona està retrassada } \theta = -$$

$$55^\circ V_{R\text{Màxim}} = 24,29 \, V \quad V_{\text{Reficac}} = \frac{24,3}{\sqrt{2}} = 17,18 \angle -55^\circ \, V \quad I = \frac{V_R}{R} = \frac{17,18 \angle -55^\circ}{15 \angle 0^\circ} = 1,14 \angle -55^\circ \, A$$

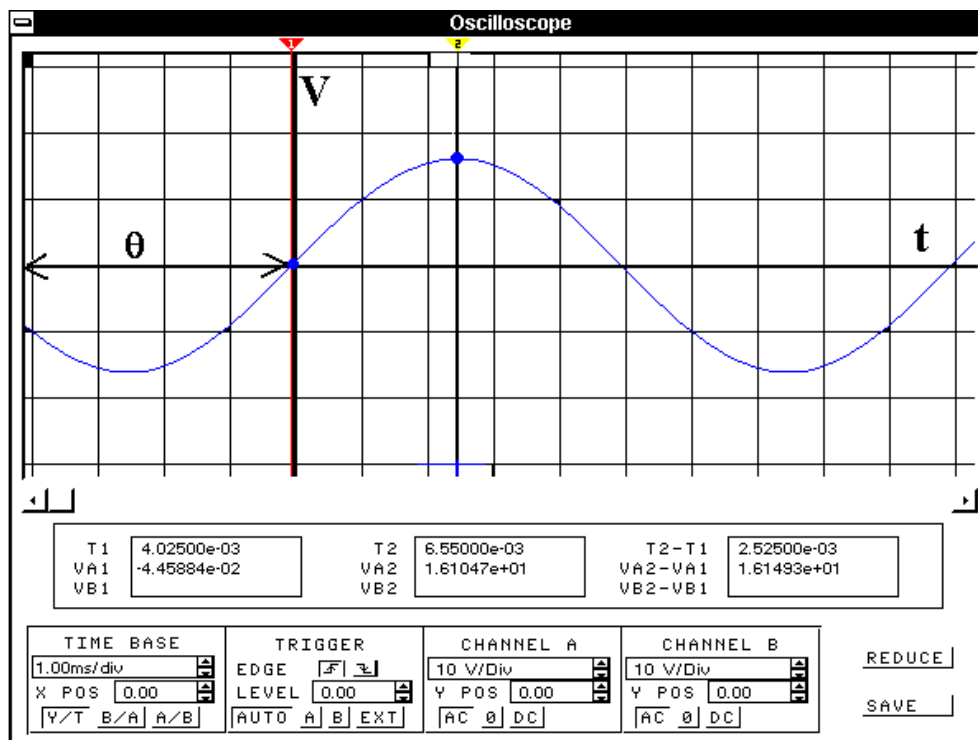
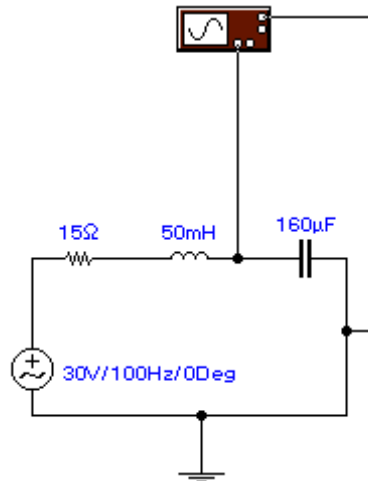
A la bobina



$$\theta \equiv 1 \text{ ms} ; \frac{5}{180} = \frac{1}{x} \rightarrow x \approx 35^\circ$$

$$V_{L\text{Màxim}} = 50,86 \text{ V} \quad V_{\text{eficaç}} = \frac{50,86}{\sqrt{2}} = 35,9_{35^\circ} \text{ V} \quad I = \frac{V_L}{X_L} = \frac{35,9_{35^\circ}}{31,42_{90^\circ}} = 1,14_{-55^\circ} \text{ A}$$

Al condensador



$$\theta \equiv 4 \text{ ms} ; \frac{5}{180} = \frac{4}{x} \rightarrow x \equiv 145^\circ \text{ com que l'ona està retrassada } \theta = -145^\circ$$

$$V_{CM\grave{a}xim} = 16,1 \text{ V} \quad V_{Cefica\grave{ç}} = \frac{16,1}{\sqrt{2}} = 11,38_{-145^\circ} \text{ V} \quad I = \frac{V_C}{X_C} = \frac{11,38_{-145^\circ}}{99,95_{-90^\circ}} = 1,14_{-55^\circ} \text{ A}$$



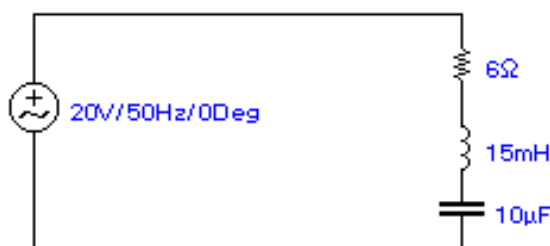
Exercicis

1. Dues intensitats alternes sinusoïdals estan desfasades 30° ; la freqüència és de 100 Hz. Calcula el període i el temps que correspon al desfasament entre les intensitats ?
2. Verifica que la reactància d'una bobina (X_L) o d'un condensador (X_C) tenen realment la mateixa dimensió física que l'Ohm .
3. La reactància d'un inductor té un valor de 100Ω a la freqüència d'1 KHz. Quin és el seu coeficient d'autoinducció?
4. Un condensador de $6 \mu\text{F}$ es connecta a un generador de 4V i freqüència 3 KHz. Calcula la intensitat en el condensador i escriu-ne l'expressió matemàtica .
5. Tenim un condensador connectat a una tensió de 10 V i 1 KHz. La intensitat que passa pel condensador és de 40 mA. Quina capacitat té el condensador ?
6. Quan connectem un condensador de $10 \mu\text{F}$ a una determinada tensió alterna de 50 V , hi circula una intensitat de 350 mA. Quina és la freqüència del generador ?
7. Connectem un condensador de $40 \mu\text{F}$ en sèrie amb una resistència de 100Ω a un generador de 220 V i 50 Hz . Quina intensitat hi ha en el circuit ? Quin angle de desfasament tenen la tensió del generador i la intensitat ? A quants segons equival l'angle de desfasament ?
8. La bobina d'un electroimant presenta un coeficient d'autoinducció de 25 mH i una resistència òhmica negligible . Si el connectem a la xarxa elèctrica de 220 V i 50 Hz , quina intensitat passa per la bobina ?
9. Volem reduir en un 25% la intensitat que passa per l'electroimant de l'exercici anterior . Ho farem connectant una resistència en sèrie . Quin valor ha de tenir la resistència ?
10. Quan la freqüència d'un generador de corrent altern aplicat a un circuit RLC es redueix a la meitat , què passa amb els valors òhmics R , X_L i X_C .
11. Un inductor té aquestes característiques : un coeficient d'autoinducció de 8 mH i una resistència òhmica de 15Ω . El connectem a un generador de 6 V i una freqüència que pot variar entre 200 Hz i 600 Hz . Expressa la intensitat per l'inductor en el dos casos límits de la freqüència .
12. Un condensador de $12 \mu\text{F}$, una resistència de 12Ω i un inductor de 12 mH es connecten en sèrie a un generador de 12 V i 400 Hz. Calcula la impedància del circuit i la intensitat que hi circula .

13. Tenim una resistència connectada a un generador de 40 V i 100 Hz, per la qual circula una intensitat d'1 A.

- Volem reduir aquesta intensitat a la meitat connectant una bobina en sèrie amb la resistència. Quin coeficient d'autoinducció ha de tenir la bobina?
- Volem reduir aquesta intensitat a la meitat connectant un condensador en sèrie amb la resistència. Quina capacitat ha de tenir el condensador?
- Què succeeix si connectem el condensador i la bobina en sèrie amb la resistència?

14. A quina freqüència s'anulen els efectes del condensador i de la bobina? Quina intensitat circula pel circuit?



15. Tenim una bobina de coeficient d'autoinducció 40 mH i resistència òhmica 10Ω.

- Quan la connectem a un generador de 12 V i 50 Hz, quina intensitat hi circula?
- Si volem anular l'efecte de l'autoinducció de 40 mH connectant un condensador en sèrie, quin valor ha de tenir el condensador? Quina intensitat hi circularà?

16. Una bobina de resistència òhmica 10 Ω i de coef. d'autoinducció 90 mH es connecta en sèrie amb un condensador de 22 μF. Calcula:

- La freqüència de resonància del circuit
- La impedància i ϕ a la freqüència de resonància.
- La impedància i ϕ a la meitat de la freqüència de resonància.
- La impedància i ϕ al doble de la freqüència de resonància.

17. Una bobina i un condensador estan connectats en sèrie. La reactància capacitiva del condensador és de 3,5 KΩ a la freqüència de resonància de 12 KHz. Calcula:

- La capacitat del condensador
- El coef. d'autoinducció de la bobina.

18. Tenim un circuit configurat per un condensador de 60 μF, un inductor ideal de 100 mH i una resistència de 10 Ω en paral·lel, amb un generador de 220 V i 50 Hz. Calcula:

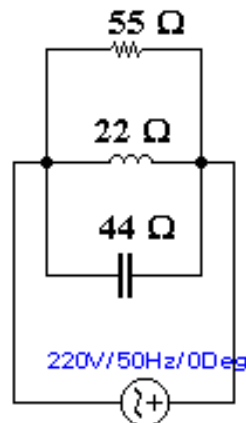
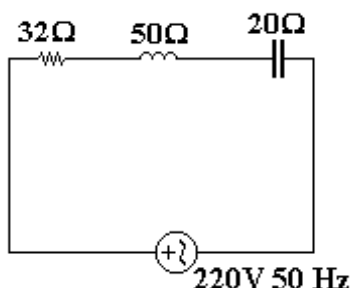
- La intensitat per cada component
- La intensitat total

19. Tenim un circuit sèrie RC connectat a 220 V i freqüència 50 Hz. Si la intensitat que passa és de 4 A i la potència activa de 250 W, esbrina

- Factor de potència.
- R i C.
- Potències reactiva i aparent
- V_R i V_C

20. Calcula :

- Les intensitats que hi ha al circuit
- La impedància total i el desfas



21. A partir del circuit sèrie RLC següent esbrina :

- Impedància del circuit i triangle d'impedàncies
- Intensitat que hi circula
- La tensió en els borns de cada element . Triangle de tensions
- Triangle de potències .

22. A una xarxa de 220 V i 50 Hz hi ha connectada una resistència de $15\ \Omega$ en sèrie , amb una bobina pura per on circula un corrent d'11 A. Calcula

- El coeficient d'autoinducció de la bobina
- El factor de potència

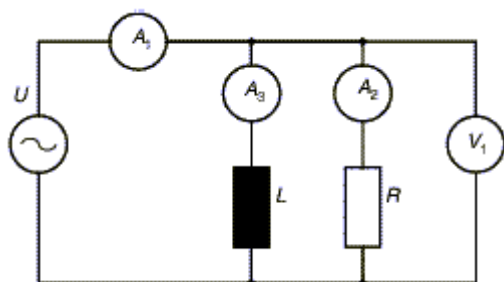
23. Disposem d'un circuit sèrie RLC , on $R=10\ \Omega$, $L=10\ \text{mH}$ i $C=558,7\ \mu\text{F}$, connectats a una tensió $V=537,4 \sin 314 t$ (V) . Calcula :

- La impedància del circuit. Triangle d'impedàncies
- La tensió eficaç als borns de cada receptor. Triangle de tensions
- Les potències que desenvolupa el circuit. Triangle de potències.

24. Una línia monofàsica de 220 V i 50 Hz alimenta un motor de 5 CV amb $\cos \varphi=0,6$, una estufa de 3kW amb $\cos \varphi=1$ i una bateria de condensadors de $X_C=40\ \Omega$ amb $\cos \varphi=0$, tots ells connectats en paral·lel . Calcula :

- Intensitat que subministra la línia . Triangle de intensitats
- Factor de potència de la línia
- Potències que subministra la línia .

25. Per al circuit de la figura, determineu:

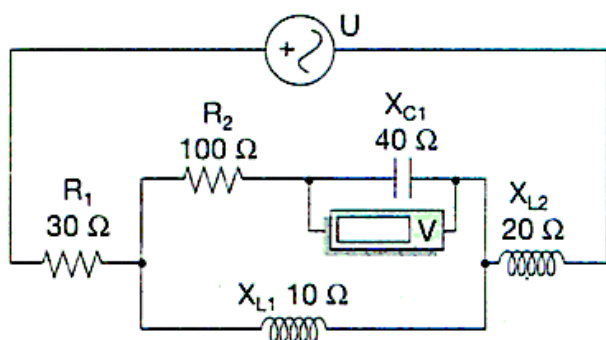
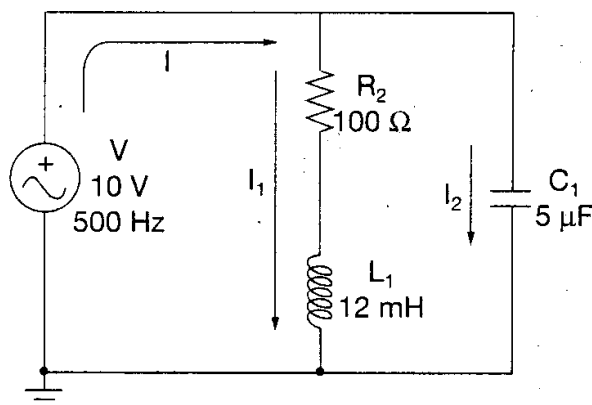


$f = 50 \text{ Hz}$	$A_1 = 13 \text{ A}$
$V_1 = 220 \text{ V}$	$A_2 = 11 \text{ A}$

- La representació vectorial dels corrents del circuit i la mesura de l'amperímetre A_3 .
- El valor de R .
- El valor de L .
- Les potències activa, reactiva i aparent, així com el factor de potència del conjunt del circuit.

26. Calcula :

- Potència activa i reactiva a cada component
- Triangle de potències de tot el circuit

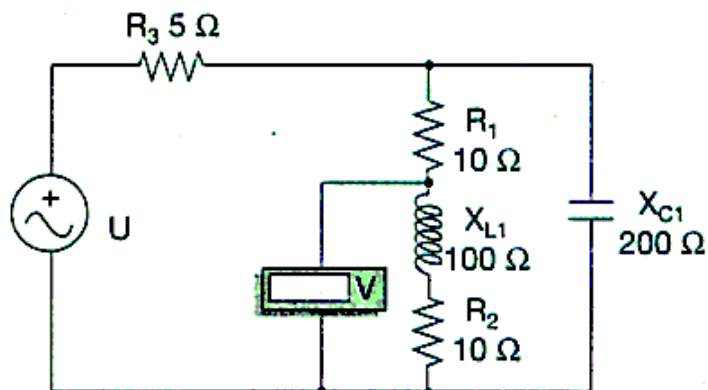


27. Si el voltímetre marca 3 V i la freqüència de funcionament és de 2 KHz .
Calcula:

- La tensió del generador U
- El valor dels coeficients de les bobines
- La capacitat del condensador .

28. La freqüència de funcionament és de 8,5 KHz i el voltímetre marca 4 V .
Calcula :

- La tensió U del generador
- L de la bobina
- C del condensador



29. Una bobina de 25Ω de resistència òhmica i 40 mH de coef. d'autoinducció es connecta en paral·lel amb una segona bobina de 15Ω de resistència òhmica i 60 mH de coef. d'autoinducció. Conecten el conjunt a un generador de 120 V i 50 Hz . Calcula :

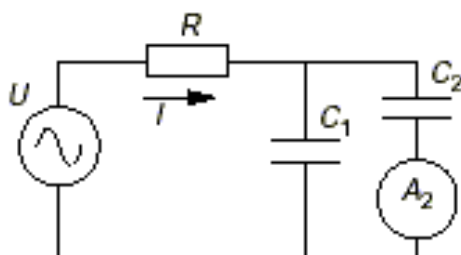
- La intensitat que passa per cada bobina
- La intensitat Total
- La impedància equivalent al conjunt de les bobines .

30. Tenim una bobina de 10Ω de resistència òhmica i 120 mH de coef. d'autoinducció , connectada a la xarxa elèctrica de 220 V i 50 Hz . Calcula :

- La intensitat que circula per la bobina (mòdul i fase)
- Volem que la intensitat que passa pel generador tingui la mateixa fase que la tensió , o sigui , fase 0° . Per aconseguir-ho , afegirem un condensador en paral·lel a la bobina . Calcula'n el valor .

31. El circuit de la figura absorbeix una potència $P = 250 \text{ W}$. Determineu:

- El corrent I subministrat per la font de tensió.
- La tensió U de la font.
- La lectura de l'amperímetre A_2 .



$R = 10 \Omega$	$f = 50 \text{ Hz}$
$C_1 = 100 \mu\text{F}$	$C_2 = 220 \mu\text{F}$

32. Per millorar l'fdp d'una càrrega industrial , es connecta en paral·lel un equip que consumeix 20 kVA , i s'aconsegueix un fdp total de $0,92$ inductiu . La potència aparent total és de 150 kVA . Determina el triangle de potències de la càrrega industrial.

33. Un generador de 220 V i 50 Hz subministra una $S = 5000 \text{ VA}$ a una càrrega amb un fdp = $0,6$ inductiu. Calcula la capacitat que cal connectar en paral·lel per aconseguir :

- fdp = $0,9$ inductiu
- fdp = $0,9$ capacitiu
- fdp = 1

34. Una instal·lació elèctrica a $220 \text{ V} / 50 \text{ Hz}$ té una potència activa total de 14 KW i un fdp de $0,72$. Mitjançant un equip de millora de fdp , s'ha aconseguit un fdp de $0,94$.

- Quin és el valor del condensador que s'ha muntat ?
- Quina intensitat activa consumeix la instal·lació ?
- Quina intensitat reactiva consumeix la instal·lació amb l'equip de millora de l'fdp ? i sense l'equip de millora ?
- Amb l'equip de millora hi connectem una màquina que consumeix 1 KW de potència activa i 6 kVA de potència reactiva. Quin és el nou fdp de la instal·lació.?

35. Un circuit està format per dues impedàncies $Z_1 = 6_{45^\circ} \Omega$ i $Z_2 = 8_{20^\circ} \Omega$ en sèrie , connectades a un generador de 10 V i 400 Hz . Calcula:

- triangle de potències del receptor
- Si volem un fdp = $0,95$ quin condensador ficarem en paral·lel al conjunt Z_1 i Z_2 .